Chapitre V : Calcul algébrique

Dans tout ce chapitre, on note $\mathbb{K}$ le corps des réels ou celui des complexes. Ainsi $x \in \mathbb{K}$ signifie $x \in \mathbb{R}$ ou $x \in \mathbb{C}$.

A propos de la notion de famille.
Soit I un ensemble. Une famille $(a_i)_{i\in I}$ est une collection d'objets a_i que l'on indice, indexe ou « numérote » par les éléments de I.

- Dans une famille un même nombre peut être répété (on peut avoir $a_i = a_j$ pour $i \neq j$). Par exemple si $I = [\![-3;3]\!] = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ et si pour tout $i \in I$, $a_i = i^2$, alors la famille $(a_i)_{i\in I}$ contient, entre autres, deux fois l'élément 1. Il ne faut donc pas confondre la famille $(a_i)_{i\in I}$ avec l'ensemble $\{a_i \mid i \in I\} = \{0,1,4,9\}$.
- Dans une famille l'ordre des éléments n'a pas d'importance. Ainsi $(i)_{i\in\{1,2,3\}} = (4-i)_{i\in\{1,2,3\}}$. Une famille finie n'est donc pas le même objet qu'un n-uplet pour lequel l'ordre est important $(1,2) \neq (2,1)$.
- Exemples :
  - $\left(2^i\right)_{0\leqslant i\leqslant 5}$ est la famille 1, 2, 4, 8, 16 et 32.
  - $(2k+1)_{k\in\mathbb{N}}$ est la suite des entiers naturels impairs.
  - $(\sqrt{x})_{x\in\mathbb{R}_+}$ est une autre écriture pour désigner la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.
  - $\left(f^2\right)_{f\in\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ est la famille des carrés des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Dans tout ce chapitre I désignera un ensemble **FINIE** d'éléments. Même si rien n'interdit de considérer un ensemble fini de réels, de complexes ou autres, on pourra toujours considérer que I désigne un ensemble fini d'entiers (naturels ou relatifs). On aura souvent en particulier (mais pas toujours) $I = \{0,\dots,n\}$ ou $I = \{1,\dots,n\}$.

I La somme $\sum$ et le produit $\prod$

I.1 Notation $\sum$ et $\prod$

Définition I.1

Soient I un ensemble fini et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels ou complexes. On note

- $\displaystyle\sum_{i\in I} a_i$ **la somme** de tous les éléments de la famille $(a_i)_{i\in I}$,
- $\displaystyle\prod_{i\in I} a_i$ **le produit** de tous les éléments de la famille $(a_i)_{i\in I}$.

Si $I = [\![q;p]\!] = \{q, q+1, \dots, p-1, p\}$, avec $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$, on note également

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{q\leqslant i\leqslant p} a_i = \sum_{i=q}^{p} a_i = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\prod_{i\in I} a_i = \prod_{q\leqslant i\leqslant p} a_i = \prod_{i=q}^{p} a_i = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Exemple 1 :

1. Si $I = [\![1;5]\!]$ et $a_i = i$ pour tout $i \in I$, alors

$$\sum_{i=1}^{5} a_i = \sum_{i=1}^{5} i = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^{5} a_i = \prod_{i=1}^{5} i = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

2. Si $I = \{0,2,4,6\}$ et $a_i = 2^i$ pour tout $i \in I$, alors

$$\sum_{i\in I} a_i = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \text{et} \quad \prod_{i\in I} a_i = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Remarque 2 : D'une façon général il est possible de noter la somme (la même remarque est valable pour le produit) $\sum_I a_i$ par $\sum_{\text{description de l'ensemble } I \text{ sans accolade}} a_i$. Par exemple si $I = \{ i \in \mathbb{N} \mid i \text{ divise } 12 \}$ alors

$$\sum_{i \in I} i = \sum_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ i \mid 12}} i = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Remarque 3 : Vous trouverez parfois les conventions suivantes :

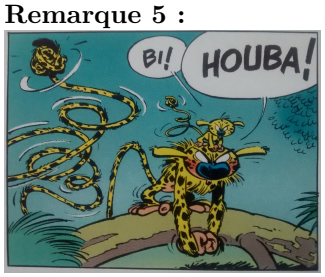
- si $I = \emptyset$ est vide, $\sum_{i \in I} a_i = 0$ et $\prod_{i \in I} a_i = 1$,
- si $q > p$ alors $\sum_{i=q}^{p} a_i = 0$ et $\prod_{i=q}^{p} a_i = 1$

Remarque 4 : L'indice de sommation est muet !
L'indice i utilisé pour décrire la famille $(a_i)_{i \in I}$ ainsi que la somme $\sum_{i \in I} a_i$ ou le produit $\prod_{i \in I} a_i$ est un indice muet qui peut être modifié en une autre lettre sans porter à conséquence :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{k \in I} a_k = \sum_{f \in I} a_f = \sum_{\zeta \in I} a_\zeta.$$

Naturellement et comme à l'accoutumée, on veillera à ne pas utiliser une lettre précédemment réservée.

Remarque 5 :



IMPORTANT. La somme totale (ou le produit) ne doit JAMAIS dépendre de l'indice de sommation (ou de multiplication). Des monstruosités du genre $\sum_{k=1}^{10k} a_k$ ou $\sum_{k=1}^{100} a_k = \dfrac{57k+2}{100}$ ne doivent jamais être commises, sinon je cogne.

Remarque 6 : La longueur d'une somme $\sum_{k=q}^{p} \cdots$ est de $p - q + 1$.

I.2 Premières manipulations

Proposition I.2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, I un ensemble fini ayant n éléments, $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$ deux familles de réels ou de complexes et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

1. $\left(\sum_{i \in I} a_i\right) + \left(\sum_{i \in I} b_i\right) = \dots\dots\dots\dots\dots$
2. $\left(\prod_{i \in I} a_i\right)\left(\prod_{i \in I} b_i\right) = \dots\dots\dots\dots\dots$
3. $\sum_{i \in I} (\lambda a_i) = \dots\dots\dots\dots\dots$
4. $\prod_{i \in I} (\lambda a_i) = \dots\dots\dots\dots\dots$

Définition I.3

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle **factorielle** n l'entier défini par

$$n! = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Et on pose également par convention, $0! = \dots\dots$

Exemple 7 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $I = [\![1; n]\!]$ et $(a_k)_{k \in I}$ la famille des entiers pairs de 2 à $2n$.

1. Pour tout $k \in I$ décrire a_k en fonction de k.
2. En déduire une écriture de $\prod_{k \in I} a_k$ en fonction de $n!$.

Rappel : deux ensembles I et J sont disjoints si leur intersection $I \cap J$ est vide, si pour tout $i \in I$, $i \notin J$ et pour tout $j \in J$, $j \notin I$.

Proposition I.4

Soient I et J deux ensembles **disjoints** et $(a_i)_{i\in I\sqcup J}$ une famille d'éléments de réels ou de complexes, alors

$$\left(\sum_{i\in I} a_i\right)+\left(\sum_{j\in J} a_j\right)=\sum_{i\in I\sqcup J} a_i \qquad \text{et} \qquad \left(\prod_{i\in I} a_i\right)\left(\prod_{j\in J} a_j\right)=\prod_{i\in I\sqcup J} a_i.$$

En particulier on a la **relation de Chasles** : pour tout $(p,q,m)\in\mathbb{Z}^3$, $q\leqslant m<p$ on a

$$\left(\sum_{k=q}^{m} a_k\right)+\left(\sum_{k=m+1}^{p} a_k\right)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \text{et} \qquad \left(\prod_{k=q}^{m} a_k\right)\left(\prod_{k=m+1}^{p} a_k\right)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exemple 8 : Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On note B_n le produit des entiers impairs entre 1 et $2n+1$ et A_n le produit des entiers pairs entre 1 et $2n$. Simplifier l'écriture de A_nB_n puis à l'aide de l'exemple 7, déterminer B_n en fonction de $(2n+1)!$ et $n!$.

Anti-Proposition I.5

Il est évident que $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\neq\frac{1}{2+2}$ à ce titre vous ne commettrez jamais dans votre vie l'erreur d'affirmer le contraire qu'en général

$$\sum_{k=p}^{q}\frac{1}{a_k}\neq\frac{1}{\sum_{k=p}^{q} a_k}.$$

I.3 Techniques de calculs

Proposition I.6 (glissement d'indice)

Soit $(p,q)\in\mathbb{N}^2$, $q\leqslant p$ et $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de réels ou de complexes. Pour tout $r\in\mathbb{N}$, en posant $\tilde{k}=k-r$, on a

$$\sum_{k=q+r}^{p+r} a_k=\sum_{\tilde{k}=q}^{p} a_{\tilde{k}+r}=\sum_{k=q}^{p} a_{k+r} \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=q+r}^{p+r} a_k=\prod_{\tilde{k}=q}^{p} a_{\tilde{k}+r}=\prod_{k=q}^{p} a_{k+r}.$$

Exemple 9 : Simplifier $\prod_{k=1}^{n}(k+5)$.

Exemple 10 : Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculons $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)}$.

Proposition I.7 (inversion d'indice)

Soit $(p,q)\in\mathbb{N}^2$, $q\leqslant p$ et $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de réels ou de complexes. Pour tout $r\in\mathbb{N}$, en posant $\tilde{k}=p-k$, on a

$$\sum_{k=q}^{p} a_k=\sum_{\tilde{k}=0}^{p-q} a_{p-\tilde{k}}=\sum_{k=0}^{p-q} a_{p-k} \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=q+r}^{p+r} a_k=\prod_{\tilde{k}=q}^{p} a_{\tilde{k}+r}=\prod_{k=q}^{p} a_{k+r}.$$

Exemple 11 : Simplifier $\prod_{k=0}^{n-1}\left(n^3-3n^2k+3nk^2-k^3\right)$.

Exemple 12 : Calculer $S_n=\sum_{k=1}^{n} k$ par une inversion d'indice.

Remarque 13 : Il est possible d'effectuer d'autres changements de variables plus exotiques transformant un ensemble I en un ensemble J pourvu que ces deux ensembles aient exactement le même nombre d'éléments.

Exemple 14 : On reprend l'exemple 7 et on note A_n le produit des entiers pairs entre 2 et $2n$: $A_n=\prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2n\\ k \text{ pair}}} k$.

Dans cet exemple l'ensemble $I = \{k \in [\![1;2n]\!] \mid k \text{ pair}\}$ est en bijection avec l'ensemble $[\![1;n]\!]$. Donc en posant le changement de variable $\tilde{k} = \frac{k}{2}$, on obtient :

$$A_n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Proposition I.8 (somme et produit télescopique)

Soient $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$, $q \leqslant p$ et $(a_i)_{i\in[\![q;p+1]\!]}$ une famille de réels ou de complexes. On a

$$\sum_{i=q}^{p} (a_{i+1} - a_i) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si de plus les a_i sont non nuls alors

$$\prod_{i=q}^{p} \frac{a_{i+1}}{a_i} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Sommation par paquets

Exemple 15 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $S_n = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k$. On regroupe les termes deux par deux :

$$S_n = \underbrace{-1+2}\underbrace{-3+4}\ldots\underbrace{-(2n-1)+(2n)} = \sum_{k=1}^{n}(2k-(2k-1)) = \sum_{k=1}^{n} 1 = n.$$

I.4 Sommes et produits remarquables

Proposition I.9 (somme et produit d'une constante)

Soit $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$, $q \leqslant p$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\sum_{k=q}^{p} \lambda = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{et} \quad \prod_{k=q}^{p} \lambda = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Proposition I.10

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

1. $\sum_{k=1}^{n} k = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
2. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
3. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Rappel (suite arithmétique)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels ou de complexes et $r \in \mathbb{K}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
4. Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $q \leqslant p$, $u_p = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exemple 16 : (somme arithmétique). Soient $r \in \mathbb{K}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Exemple 17 : (somme arithmétique). Soient $r \in \mathbb{K}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r. Montrons que

pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $q \leqslant p$,

$$\sum_{k=q}^{p} u_k = \frac{u_p + u_q}{2}(p-q+1).$$

Autrement dit,

somme des termes = moyenne du premier et dernier terme × nombres de termes.

Exemple 18 : Calculer la somme des nombres impairs de 1 à 99 en utilisant une suite arithmétique.

Rappel (suite géométrique)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels ou de complexes et $q \in \mathbb{K}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
4. Pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, $m \leqslant n$, $u_n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Proposition I.11 (somme géométrique)

Soient $q \in \mathbb{K}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q. Si $q \neq 1$, alors pour tout $m \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant m$,

$$\sum_{k=m}^{n} q^k = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Remarque 19 :

1. La proposition doit être connue sur le bout des doigts. Si $m = 0$, on obtient directement
$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$
2. Il est naturellement très important de vérifier que $q \neq 1$ pour utiliser les formules ci-dessus. Le cas $q = 1$ correspond à la suite constante, dont la somme se calcule facilement (voir la proposition I.6).

Exemple 20 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} 2^k \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)$.

Proposition I.12 (Formule de Bernoulli)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et a et b deux réels ou complexes. On a

$$a^n - b^n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exemple 21 : Soit $a \in \mathbb{C}$. Donner le développement de $(a+1)^4 - a^4$.

II Coefficient binomial et formule du binôme de Newton

Définition II.1

Soit $(k,n) \in \mathbb{N}^2$, $k \leqslant n$. On appelle **coefficient binomial** de k parmi n, noté $\binom{n}{k}$, le réel

$$\binom{n}{k} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Par convention, si $k < 0$ ou si $k > n$, on pose $\binom{n}{k} = 0$.

Interprétation combinatoire.

Soient k et n deux entiers naturels tels que $k \leqslant n$. Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ correspond aux nombres de façons qu'il y a de tirer k boules *simultanément* parmi un lot de n boules.
Pour l'établir commençons tout d'abord par calculer le nombre de façons de ranger k boules parmi n boîtes, ce que l'on appelle le nombre d'arrangements de k parmi n, noté A_n^k (nous y reviendrons dans le chapitre dénombrement). Pour la première boule, les n tiroirs sont disponibles, on a donc n choix possibles. Pour la deuxième boule tous les tiroirs sauf celui qui contient la première boule, sont disponibles. Pour la deuxième boule il reste $n-1$ tiroirs de disponibles. De même pour la troisième boule il reste $n-2$ possibilités. Et ainsi de suite jusqu'à la boule numéro k pour laquelle il reste $n-k+1$ tiroirs possibles. Au total nous avons donc

$$A_n^k = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) \times (n-k) \times \cdots \times 1}{(n-k) \times \cdots \times 1} = \frac{n!}{(n-k)!},$$

possibilités pour ranger k boules dans n tiroirs.
La même démarche est valide pour compter le nombre de façons de tirer *successivement* et *sans remise* k boules parmi n. Nous pouvons tout d'abord piocher n boules, puis au deuxième tirage il nous reste $n-1$ possibilités, au troisième $n-2$ etc. Au bilan A_n^k correspond également au nombre de façons de tirer successivement et sans remise k boules parmi n.
Maintenant si l'on tire d'abord les k boules d'un coup parmi les n puis qu'on ordonne ses k boules on obtient au bilan un tirage ordonné de k boules parmi n. En d'autres termes tirer k boules parmi n puis les ranger, correspond à un arrangement A_n^k. Comptons le nombre de façon de tirer k boules parmi n puis de les ranger. Notons C_n^k le nombre de façons de tirer *simultanément* k boules parmi n. Une fois ces k boules tirées les ordonner correspond au fait de ranger k boules parmi k cases, on obtient donc au total

$$C_n^k \times k!$$

façons de tirer k boules d'un coup parmi n puis de les ordonner. On peut voir aussi que cela correspond à choisir d'abord k tiroirs parmi n, puis de ranger k boules dans ces k tiroirs. Or on a dit que cela équivaut également à un tirage successif et sans remise de k boules parmi n ou encore à un rangement de k boules dans n tiroirs. Ainsi

$$A_n^k = C_n^k \times k!$$

De cette formule, on déduit le nombre de façons de tirer simultanément k boules parmi n :

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)} = \binom{n}{k}.$$

Remarque 22 :

- Vous croiserez peut-être, notamment dans de vieux livres, la notation C_n^k qui est une écriture désuète de $\binom{n}{k}$.
- Les valeurs remarquables

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = \ldots\ldots\ldots \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = \ldots\ldots\ldots$$

  sont à connaître.

Proposition II.2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in [\![0; n]\!]$, on a

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Proposition II.3 (Formule de Pascal)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, on a

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Remarque 23 : Cette formule donne une façon rapide de calculer les premiers coefficients binomiaux par ce que l'on appelle le triangle de Pascal.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

La formule $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ se retrouve bien dans la symétrie des termes de droites du triangle par rapport aux termes de gauche.

Corollaire II.4

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in [\![0; n]\!]$, on a

$$\binom{n}{k} \in \mathbb{N}^*.$$

Proposition II.5 (Binôme de Newton)

Soient $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$(a+b)^n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exemple 24 : Les deux cas particuliers suivants sont à connaître. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0.$$

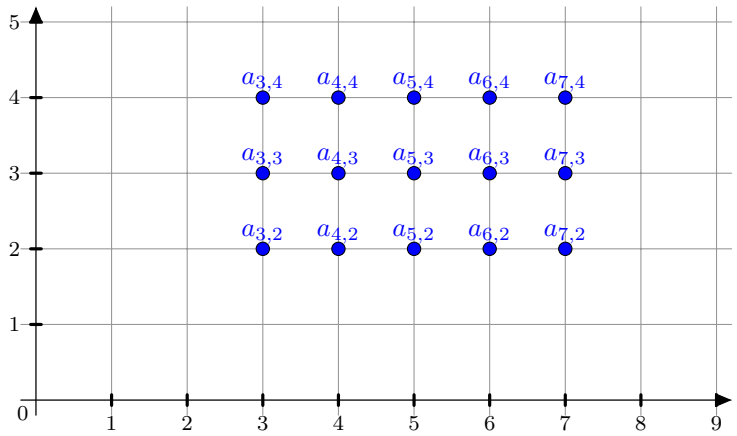
Exemple 25 : Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

III Sommes doubles

III.1 Sommes indexées par un rectangle

Soient m, n, p, q quatre entiers tels que $m \leqslant n$ et $q \leqslant p$. On pose $I = [\![m; n]\!] \times [\![q; p]\!]$ et on considère une famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in I}$ de complexes ou de réels. L'ensemble I correspond à l'ensemble des couples d'entiers dont la première coordonnée est entre m et n et la seconde entre q et p. On peut représenter I dans le plan comme étant l'ensemble des points M à coordonnées entières contenus dans le rectangle $[m; n] \times [q; p]$.
Exemple : $I = [\![3; 7]\!] \times [\![2; 4]\!]$



Le problème qui se pose alors pour calculer la somme $\sum_{(i,j)\in I} a_{i,j}$ de tous les termes de la famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in I}$ est l'ordre dans lequel procéder pour sommer. Pour les segments $[\![q;p]\!]$ on somme naturellement de q à p (notez que l'on peut aussi sommer de p à q par le changement d'indice $\tilde{k} = p - k + q$), ici il ne se dégage pas d'ordre naturel. Heureusement la proposition suivante vient pallier ce problème.

Proposition III.1

Soit $(m,n,p,q) \in \mathbb{Z}^4$ tel que $m \leqslant n$ et $q \leqslant p$. Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in I}$ une famille de complexes ou de réels. On a

$$\sum_{(i,j)\in[\![m;n]\!]\times[\![q;p]\!]} a_{i,j} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Pour sommer tous les éléments de la famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in I}$, commençons par les ranger dans le tableau ci-dessous :

i \ j	q	$\ldots$	j	$\ldots$	p	Somme sur les colonnes
m	$a_{m,q}$	$\ldots$	$a_{m,j}$	$\ldots$	$a_{m,p}$	$\sum_{j=q}^{p} a_{m,j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	$a_{i,q}$	$\ldots$	$a_{i,j}$	$\ldots$	$a_{i,p}$	$\sum_{j=q}^{p} a_{i,j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$a_{n,q}$	$\ldots$	$a_{n,j}$	$\ldots$	$a_{n,p}$	$\sum_{j=q}^{p} a_{n,j}$
Somme sur les lignes	$\sum_{i=m}^{n} a_{i,q}$	$\ldots$	$\sum_{i=m}^{n} a_{i,j}$	$\ldots$	$\sum_{i=m}^{n} a_{i,p}$	$\sum_{(i,j)\in[\![m;n]\!]\times[\![q;p]\!]} a_{i,j}$

La proposition affirme simplement que pour sommer tous les termes du tableau, on peut sommer d'abord toutes les lignes, $\sum_{i=m}^{n} a_{i,j}$, puis sommer les sommes obtenues $\sum_{j=q}^{p}(\sum_{i=m}^{n} a_{i,j})$. On peut aussi sommer toutes les colonnes dans un premier temps, $\sum_{j=q}^{p} a_{i,j}$ et de sommer les sommes obtenues dans un second temps $\sum_{i=m}^{n}\left(\sum_{j=q}^{p} a_{i,j}\right)$. Ces deux façons de procéder aboutissent au même résultat : à la somme de toute la famille : $\sum_{(i,j)\in[\![m;n]\!]\times[\![q;p]\!]} a_{i,j}$.

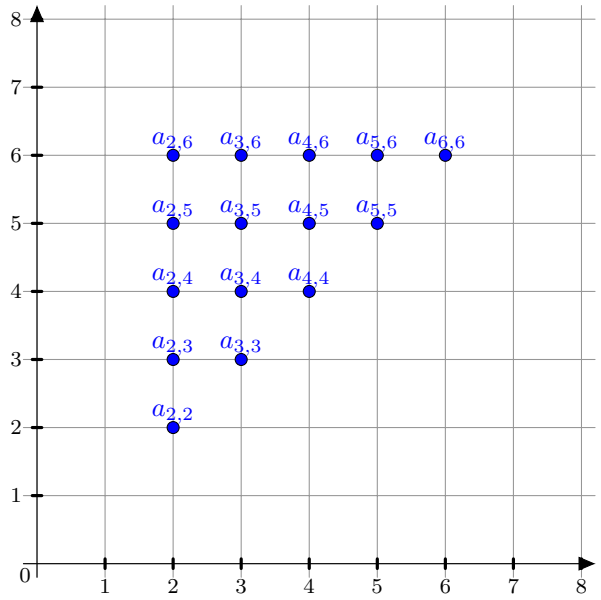
Exemple 26 : Soient $(n,m) \in \mathbb{N}^2$. Calculer $\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}} (i+j)$.

Remarque 27 :

- Il est possible de ne pas noter les parenthèses : $\sum_{(i,j)\in[\![m;n]\!]\times[\![q;p]\!]} a_{i,j} = \sum_{i=m}^{n}\sum_{j=q}^{p} a_{i,j} = \sum_{j=q}^{p}\sum_{i=m}^{n} a_{i,j}$.
- Les variables de sommations (ici i et j) sont toujours muettes et peuvent être remplacées par d'autres variables. Mais il est toujours formellement interdit de sortir une variable de sommation de la somme à laquelle elle dépend et un indice de sommation ne doit jamais être considéré comme un paramètre extérieur de la somme.

III.2 Sommes indexées par un triangle

Soient m et n deux entiers tels que $m \leqslant n$ et considérons l'ensemble $I = \left\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \;\middle|\; m \leqslant i \leqslant j \leqslant n\right\}$ ainsi que $(a_{i,j})_{(i,j)\in I}$ une famille de réels ou de complexes. La famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in I}$ est également notée $(a_{i,j})_{m\leqslant i\leqslant j\leqslant n}$. Cette fois, l'ensemble I peut-être représenté par l'ensemble des points du points dont les coordonnées (i,j) sont dans I. Cela correspond alors à un triangle.
Exemple : $m = 2$ et $n = 6$.



Proposition III.2

Soient $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $m \leqslant n$ et $(a_{i,j})_{(i,j)\in I}$ une famille de réels ou de complexes. On a

$$\sum_{m\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si de plus $m < n$, on a également,

$$\sum_{m\leqslant i<j\leqslant n} a_{i,j} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Remarque 28 :

- Il est très important de noter que dans ces doubles sommes le second indice de sommation dépend du précédent ce qui rend l'interversion des deux sommes plus délicate.
- Remarquer également que le triangle représentant l'ensemble de sommation I est équilatéral. Dans le cas d'un ensemble I plus complexe, il faudra tenter de se ramener à un cas plus favorable.

Pour comprendre ce résultat, rangeons à nouveau les éléments $(a_{i,j})_{m\leqslant i\leqslant j\leqslant n}$ dans un tableau.

i \ j	m	$m+1$	$\cdots$	$n-1$	n	Somme sur les colonnes
m	$a_{m,m}$	$a_{m,m+1}$	$\cdots$	$a_{m,n-1}$	$a_{m,n}$	$\sum_{j=m}^{n} a_{m,j}$
$m+1$	$\times$	$a_{m+1,m+1}$	$\cdots$	$a_{m+1,n-1}$	$a_{m+1,n}$	$\sum_{j=m+1}^{n} a_{m+1,j}$
$\vdots$	$\times$	$\times$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$\times$	$\cdots$	$\times$	$a_{n-1,n-1}$	$a_{n-1,n}$	$\sum_{j=n-1}^{n} a_{n-1,j}$
n	$\times$	$\cdots$	$\cdots$	$\times$	$a_{n,n}$	$\sum_{j=n}^{n} a_{n,j}$
Somme sur les lignes	$\sum_{i=m}^{m} a_{i,m}$	$\sum_{i=m}^{m+1} a_{i,m+1}$	$\cdots$	$\sum_{i=m}^{n-1} a_{i,n-1}$	$\sum_{i=m}^{n} a_{i,n}$	$\sum_{m\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j}$

On observe alors bien d'une part que

$$\sum_{m\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{j=m}^{n} a_{m,j} + \sum_{j=m+1}^{n} a_{m+1,j} + \cdots + \sum_{j=n-1}^{n} a_{n-1,j} + \sum_{j=n}^{n} a_{n,j} = \sum_{i=m}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}.$$

Et d'autre part,

$$\sum_{m\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=m}^{m} a_{i,m} + \sum_{i=m}^{m+1} a_{i,m+1} + \cdots + \sum_{i=m}^{n-1} a_{i,n-1} + \sum_{i=m}^{n} a_{i,n} = \sum_{j=m}^{n}\sum_{i=m}^{j} a_{i,j}.$$

Proposition III.3

Soit $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $m\leqslant n$ et $(a_i)_{i\in[\![m;n]\!]}$ une famille de réels ou de complexes. On a

$$\left(\sum_{i=m}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=m}^{n} a_i^2 + 2\sum_{m\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j.$$

IV Prochainement... Analyse asymptotique - Propriétés des petits o

Proposition IV.1

Soient $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$, $q < p$ alors

1. $\ldots\ldots\ldots \underset{x\to+\infty}{=} o(\ldots\ldots\ldots)$
2. $\ldots\ldots\ldots \underset{x\to 0}{=} o(\ldots\ldots\ldots)$
3. $\ldots\ldots\ldots \underset{n\to+\infty}{=} o(\ldots\ldots\ldots)$
4. $\ldots\ldots\ldots \underset{n\to+\infty}{=} o(\ldots\ldots\ldots)$

Dans les propositions qui suivent, on fixe $a \in \overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a, f, g, h trois fonctions définies sur I et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites à valeurs dans $\mathbb{K}$,.

Proposition IV.2 (Transitivité des petits o)

- *Fonctions :* si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ et $g(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$ alors $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- *Suites :* si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ alors $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Proposition IV.3 (Somme de petits o)

- *Fonctions :* si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$ et $g(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$ alors $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

  Autrement dit $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- *Suites :* si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ alors $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

  Autrement dit, $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Proposition IV.4 (Simplification de petits o)

- *Fonctions :* si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ alors $o(f(x)+g(x)) \underset{x\to a}{=} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

  Autrement dit $o(f(x)+o(f(x))) \underset{x\to a}{=} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- *Suites :* si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ alors $o(u_n+v_n) \underset{n\to+\infty}{=} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

  Autrement dit, $o(u_n+o(u_n)) \underset{n\to+\infty}{=} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Remarque 29 : On a également $o(o(f(x))) \underset{x\to a}{=} o(f(x))$ ou encore $o(o(u_n)) \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$.

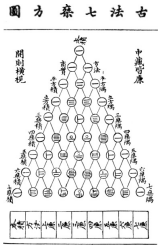
Exemple 30 : Simplifier les expressions suivantes :

1. $o\left(4x^3 - 5 + \mathrm{e}^{-x}\right) \underset{x\to+\infty}{=}$
2. $o\left(\sqrt{x} + 2x^2 + \frac{1}{x}\right) \underset{x\to 0}{=}$
3. $o\left(n^2\right) + o\left(10^4 n\right) + 2o\left(\sqrt{n^3}\right) \underset{n\to+\infty}{=}$
4. $o(\sin(x)) + o\left(1-x^2\right) + o(2\cos(x)) \underset{x\to 0}{=}$
5. $o\left(n^5+\sqrt{n}\right) + o\left(\ln\left(n^7\right)\right) + 3o(\sin(n)) \underset{n\to+\infty}{=}$
6. $o\left(\mathrm{e}^{-x^2}\right) + o\left(2+\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + o(1) \underset{x\to+\infty}{=}$

Blaise PASCAL *(Clermont-Ferrand 1623 - Paris 1662) ayant perdu sa mère à l'âge de trois ans est pris en charge par son père juriste, passionné de mathématiques et qui fréquentait les plus grands savants de l'époque. Dès l'enfance, Pascal montra des dons exceptionnels pour les mathématiques. On prétend ainsi qu'il retrouva par lui-même la plupart des résultats d'Euclide. A seize ans il écrivit un Essay pour les coniques d'une si grande qualité que Descartes eu peine à croire que c'était l'oeuvre d'un adolescent. Il se passionna pour l'hydrostatique et établit la pesanteur de l'air. Il entra en contact avec Fermat avec qui il eu un fructueux échange épistolaire. On y retrouve en particulier les prémices du calcul des probabilités.*

Un matin de novembre 1654, Pascal tomba en extase mystique et abandonne les sciences pour la théologie. Il écrivit alors deux chefs-d'oeuvre de la littérature Pensées et Les Provenciales mais sa production scientifique s'interrompit totalement durant quatre ans. Un soir de l'année 1658, souffrant d'un fort mal de tête, Pascal pour se divertir réfléchit à la cycloïde. Ses souffrances disparurent aussitôt. Convaincu que c'était un signe de Dieu lui montrant qu'il n'était pas opposé aux mathématiques, Pascal revint à l'étude des mathématiques. Son domaine de prédilection était la géométrie mais Pascal s'intéressa également à l'analyse infinitésimal vers la fin de sa vie, théorie qui sera largement développée par Newton et Leibniz par la suite.
Pascal est sans doute l'un des mathématicien les plus profonds mais sa mort prématurée et son mysticisme l'ont empêché d'être parmi les plus féconds.

Le triangle de Pascal est déjà connu des mathématiciens Yang Hui et Zhu Shijie (XIII et XIV siècle). Le mathématicien arabe Al Kachi l'utilise également vers 1400. Pascal en fit une étude détaillée en 1653.



Soit $\mathscr{A}$ l'ensemble des lettres de l'alphabet, $\mathscr{A} = \{a, b, \ldots, z\}$. Calculer le produit $\prod_{\alpha \in \mathscr{A}} (x - \alpha)$.